



Liebe Schülerinnen und Schüler der Fachoberschule!
Liebe Studierende der Fachschule für Betriebswirtschaft

Anhand des Einstiegstests über einige Gebiete der Mathematik in der Sekundarstufe 1 haben Sie möglicherweise erfahren, wo Ihre Stärken und Schwächen liegen. Ähnlich wie im Sport, sollten Sie Ihre Stärken ausbauen und die Schwächen abbauen. In den nächsten Wochen haben Sie Gelegenheit dazu. Wir Mathematiklehrer der Max-Weber-Schule haben eine Fördermappe zusammengestellt, mit deren Hilfe Sie an den Themen arbeiten können, die für Sie wichtig sind. Die wichtigsten Regeln zu jedem Thema wurden zusammengestellt und zu jedem Thema gibt es einige Aufgaben. Wenn die Aufgaben gelöst sind, können Sie Ihre Lösungen mit denen des Lehrers vergleichen.
Viel Spaß dabei!

Themen der Fördermappe

- 1. Grundrechenarten**
- 2. Wurzeln und Potenzen**
- 3. Rechnen mit Klammern**
- 4. Binome**
- 5. Bruchrechnen**
- 6. Dreisatz und Prozentrechnen**
- 7. Maße**
- 8. Koordinatensystem**
- 9. Lineare Gleichungssysteme**
- 10. Strategien zur Lösung von Gleichungen**



Thema 1: Grundrechenarten – Informationen/Rechenregeln

Grundregeln

Merke

- 1) Das Innere einer Klammer wird zuerst berechnet
- 2) Bei verschachtelten Klammern wird die innere Klammer zuerst berechnet
- 3) Wo keine Klammer steht, geht Punktrechnung vor Strichrechnung
- 4) Das Berechnen einer Potenz geht noch vor Punkt und Strichrechnung
- 5) Sonst wird von links nach rechts gerechnet

Grundsätzlich rechnet man immer nach der folgenden Reihenfolge:

Erst **Klammern**, dann **Potenzen**, dann **Punkt-** und zum Schluss **Strichrechnungen**! Eselsbrücke ist das „**KlaPoPuStri**“!

Beispiel	$\begin{aligned} \text{a) } & 17,2 + 5 \cdot (7,9 - 3,4) \\ & = 17,2 + 5 \cdot 4,5 \\ & = 17,2 + 22,5 \\ & = 39,7 \end{aligned}$	Klammer zuerst Punkt vor Strich
Beispiel	$\begin{aligned} \text{b) } & 3,5 + 6 \cdot (-0,5)^2 \\ & = 3,5 + 6 \cdot 0,25 \\ & = 3,5 + 1,5 \\ & = 5 \end{aligned}$	Potenz zuerst Punkt vor Strich
Beispiel	$\begin{aligned} \text{c) } & 3,25 - [-3,6 + (2,5 \cdot (-1,5)^2)] \\ & = 3,25 - [-3,6 + (2,5 \cdot 2,25)] \\ & = 3,25 - [-3,6 + 5,625] \\ & = 3,25 - [2,025] \\ & = 1,225 \end{aligned}$	Innere Klammer zuerst; Potenz zuerst Innere Klammer; Punkt vor Strich Innere Klammer zusammenfassen Klammer auflösen; zusammenfassen

Rechnen mit Vorzeichen

Merke

Ein Vorzeichen ist ein Zeichen vor einer Zahl. Es gibt zwei Vorzeichen: Das Plus + und das Minus –.

Wenn die Vorzeichen direkt nebeneinander stehen, gilt Folgendes:

+ und + → + + und – → –
– und + → – – und – → +

Addition und Subtraktion von Zahlen mit Vorzeichen	$\begin{aligned} \text{a) } & (+2) + (+2) = 2 + 2 = 4 \\ \text{b) } & (+2) + (-2) = 2 - 2 = 0 \\ \text{c) } & (+2) - (+2) = 2 - 2 = 0 \\ \text{d) } & (+2) - (-2) = 2 + 2 = 4 \\ \text{e) } & (-2) + (+2) = -2 + 2 = 0 \\ \text{f) } & (-2) + (-2) = -2 - 2 = -4 \\ \text{g) } & (-2) - (+2) = -2 - 2 = -4 \\ \text{h) } & (-2) - (-2) = -2 + 2 = 0 \end{aligned}$
-----------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



Multiplikation von Zahlen mit Vorzeichen	a) $(+3) \cdot (+3) = 3 \cdot 3 = 9$ b) $(+3) \cdot (-3) = 3 \cdot (-3) = -9$ c) $(-3) \cdot (+3) = (-3) \cdot 3 = -9$ d) $(-3) \cdot (-3) = 9$ Gleiches gilt auch für die Division
Abtrennen des "-" vor der Zahl	Beispiel: $-5 = (-1) \cdot 5$ Allgemein: $-a = (-1) \cdot a$

Rechnen mit Variablen (Buchstaben)

Merke	
Soll ein Ausdruck mit Variablen (Buchstaben) zusammengefasst werden, so dürfen nur jeweils gleiche Variablen zusammengefasst werden	
Beispiel	$14a + 3a + 2b - 5b = \underline{17a - 3b}$ Das Ergebnis erhalten wir durch folgende Berechnungen: $14a + 3a = 17a$ $2b - 5b = -3b$
Beispiel	$2b + 2b + 2b + 2b = 8b$

Multiplikation von Variablen

Merke	
Soll ein Ausdruck mit Variablen (=Buchstaben) multipliziert werden, so werden sie wie Zahlen multipliziert	
Werden gleiche Variablen multipliziert, kürzt man das Ergebnis üblicherweise mit der Potenzschreibweise ab	
Beispiel	$3a \cdot 4c \cdot 2b = \underline{24abc}$ Das Ergebnis erhalten wir durch folgende Teilberechnungen $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ $a \cdot b \cdot c = abc$
Beispiel	$2a \cdot 5c \cdot b \cdot 6a = \underline{60a^2bc}$
Beispiel	$2b \cdot 2a \cdot b \cdot 3a \cdot 2 = \underline{24a^2b^2}$



Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden Rechenaufgaben ohne Hilfsmittel.

a) $12 - 24 - 36$

b) $-1 + 44$

c) $-44 + 11 - 5$

d) $-(-20) + (-10)$

e) $-19 + 22 - (-14)$

f) $-(-(-100)) + (+(-3)) - 1$

g) $-(+(-42)) - (+(-3)) + 2$

h) $3 \cdot (-5)$

i) $-3 \cdot (-5 \cdot (-2))$

j) $60 : (-4)$

k) $(-2000) : 10 : (-5)$

l) $-(-96) : (-2) : 6$

m) $100 : (-2) : (-(-2))$

n) $-(-4) \cdot (-4)$

o) $4 \cdot (-12) \cdot (-4)$

2. Berechnen Sie.

a) $47 + 3 \cdot 2 - 13$

b) $128 + 12 - 3 \cdot (-100)$

c) $(-121) + (-11) \cdot 2 - (-3) \cdot (-5)$

d) $59 - 3 : (-2)$

3. Fassen Sie weitgehend zusammen!

a) $4u + 3v - 2u - v$

b) $1,5x + 2,8y + 3,1z - 1,1y + 0,5x + 0,7y$

c) $10 \text{ cm} + 1 \text{ m} + 3 \text{ mm} - 90 \text{ cm} + 0,6 \text{ m} - 23 \text{ mm}$

d) $10 \text{ m} + 15 \text{ cm} + 0,8 \text{ dm} + 2 \text{ mm} + 1,5 \text{ m}$

4. Berechnen Sie und fassen Sie zusammen!

a) $3a + 2a \cdot a + 4b \cdot a + 2a \cdot b$

b) $2m \cdot 2v + 2v - 14x \cdot m - 6v + 12m \cdot x$

c) $3c \cdot c \cdot 4d - 8c \cdot d + 6d \cdot 3c$

d) $5xy - 7x + 2y \cdot x + 4x \cdot (-y) \cdot 3x + 4 \cdot (-y)$



Thema 2: Potenzen und Wurzeln

Der Potenzbegriff

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \quad \text{dafür kann man auch schreiben:} \quad 3^4 = 81$$

Den Term 3^4 bezeichnet man als **Potenz**. Dabei wird die 3 als die **Basis** bezeichnet, die 4 als **Exponent** und das Ergebnis 81 ist der **Potenzwert**.

Definition

$$\begin{array}{c} \text{Exponent} \\ \swarrow \\ \boxed{3^4 = 81} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Basis} \quad \text{Potenzwert} \end{array}$$

Eine Potenz drückt aus, wie oft eine Zahl oder ein Ausdruck mit sich selbst multipliziert wird. Das Potenzieren steht in der Reihenfolge der Rechenoperationen vor der Addition und Subtraktion und vor Multiplikation und Division.

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Regeln:

Grundregel

Potenzen können nur zusammengefasst werden, wenn sowohl die Basis als auch die Exponenten gleich sind.

Beispiel $2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$

Beispiel $a^2 + 2b^3 - 3a^3 + b^3 + 5a^3 = a^2 + 2a^3 + 3b^3$

1. Potenzgesetz

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.

Beispiel $7^3 \cdot 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$

Beispiel $a^2 \cdot a^4 = a^6$

2. Potenzgesetz

$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Exponenten mit dem Produkt der Basis potenziert.

Beispiel $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$

Beispiel $a^2 \cdot (2b)^2 = (2ab)^2 = 4a^2b^2$ aber $a^2 \cdot 2b^2 = 2(ab)^2 = 2a^2b^2$



3. Potenzgesetz

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert.

Beispiel $5^5 : 5^2 = 5^{5-2} = 5^3 = 125$

Beispiel $a^7 : a^4 = a^3$

4. Potenzgesetz

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Exponenten mit dem Quotient der Basis potenziert.

Beispiel $6^3 : 2^3 = (6 : 2)^3 = 3^3 = 27$

Beispiel $(4a)^2 : (2a)^2 = 2^2 = 4$

5. Potenzgesetz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert..

Beispiel $(5^3)^2 = 5^6$

weitere Regeln:

Merke

$$a^0 = 1$$

Potenzen mit dem Exponent 0 haben immer den Wert 1

Beispiel $2^0 = 1$

Beispiel $3652^0 = 1$

Potenzen mit negativen Exponenten:

Merke

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Potenzen mit negativen Exponenten können als Bruch geschrieben werden, indem die Potenz im Nenner des Bruches mit positivem Exponenten steht.

Beispiel $2^{-1} = \frac{1}{2}$ da $\frac{1}{2^1}$

Beispiel $3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$



Das Vorzeichen der Basis:

Merke

Eine Potenz mit positiver Basis ist immer positiv.
Eine Potenz mit negativer Basis ist positiv, wenn der Exponent gerade ist
negativ, wenn der Exponent ungerade ist.

Beispiel $(-2)^3 = -8$

Beispiel $(-3)^4 = 81$ aber $-3^4 = -81$ da das Vorzeichen nicht zur Potenz gehört!

Potenzieren von Brüchen

$$\left(\frac{3x}{4y}\right)^3 = \frac{(3x)^3}{(4y)^3} = \frac{27x^3}{64y^3}$$

Merke

Brüche werden potenziert, indem man den Zähler mit dem Exponenten potenziert und den Nenner mit dem Exponenten potenziert.

Beispiel $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

Beispiel $\left(\frac{3x}{4y}\right)^3 = \frac{(3x)^3}{(4y)^3} = \frac{27x^3}{64y^3}$

Wurzeln – Potenzen mit gebrochenen Exponenten

Merke

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Potenzen mit einem Bruch als Exponenten kann man als Wurzel schreiben, bei der der Nenner der Wurzelexponent ist und der Zähler der Exponent der Basis unter der Wurzel ist.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

Quadratwurzeln kann man als Potenzen mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$ schreiben.

Beispiel $\sqrt{16} = 16^{\frac{1}{2}} = 4$ oder $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Beispiel $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$ oder $4^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{4^3}$



Weitere Beispiele zum Umgang mit Wurzeln

Merke

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Separates Wurzelziehen. Steht unter der Wurzel ein Produkt oder ein Quotient, kann man die Wurzel aus den einzelnen Faktoren ziehen.

Beispiel	$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$
Beispiel	$\sqrt{81b^2} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{b^2} = 9b$
Beispiel	$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$
Beispiel	$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$

Suchen Sie zu jeder der folgenden Aufgaben die passende Regel oder den passenden Merksatz und lösen Sie die Aufgabe!

Aufgaben

1) $3a^2b + 5a^2b - a^2b =$	2) $5p^3 - 7p^3 + 2p^3 =$	3) $x^4 - x^3 + 3x^4 + 2x^3 =$
4) $6^3 \cdot 6^4 =$	5) $x^7 \cdot x^3 =$	6) $5^3 : 5^4 =$
7) $67^{17} \cdot 67^{13} =$	8) $10^7 : 10^3 =$	9) $40^4 : 10^4 =$
10) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 =$	11) $(2^3)^2 =$	12) $(10^2)^4 =$
13) $(-3)^3 =$	14) $(-10)^4 =$	15) $-3^4 =$
16) $5^{-2} =$	17) $(ab)^2 =$	18) $4^{-1} \cdot 5^{-1} =$
19) $13^4 : 13^4 =$	20) $z^{-3} \cdot z^4 =$	21) $\sqrt{4a^2} =$
22) $0,2^2 =$	23) $\sqrt{0,0025} =$	24) $\sqrt[3]{125} =$
25) $\sqrt[3]{-216} =$	26) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3 =$	27) $\sqrt{\frac{9}{4x^2}} =$
28) $\frac{x^7}{x^5} =$	29) $17^0 =$	30) $24^3 : 6^3 =$



Thema 3: Rechnen mit Klammern

Bevor es mit der Klammerrechnung losgeht noch einmal zur Erinnerung:

Grundregel

Punktrechnung vor Strichrechnung – ohne das geht gar nichts.

Nun zu den Klammern:

Klammern mit Variablen werden prinzipiell so aufgelöst wie Klammern, die nur reine Zahlen enthalten. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass man den Klammerinhalt meist nicht wirklich "ausrechnen" kann, aber man fängt auch hier mit den Vereinfachungen in der innersten Klammer an.

Plusklammer, d.h. vor der Klammer steht ein „+“:

Grundregel

Die Klammern können einfach weggelassen werden, wenn direkt vor der Klammer ein Plus steht (ohne Zahl!):

Beispiel

$$26x + (2y - 3z) = 26x + 2y - 3z$$

Minusklammer, d.h. vor der Klammer steht ein „-“:

Grundregel

Alle Vorzeichen in der Klammer werden umgedreht, die Klammer und das Minus vor der Klammer entfallen dadurch:

Beispiel

$$26x - (2y - 3z) = 26x - 2y + 3z$$

Zahl oder Variable oder Produkt mal Klammer

z. B.: $2(a + b)$ oder $x(a - b)$ oder $2x(a + b)$

Grundregel

Jeder Summand in der Klammer wird mit der Zahl (oder der Variable / dem Produkt) vor (hinter) der Klammer multipliziert (Distributivgesetz). Vorzeichenregeln beachten!

Beispiel

$$2 \cdot (a + b) = 2a + 2b$$

Beispiel

$$x \cdot (a + b) = ax + bx$$

Beispiel

$$2x \cdot (a + b) = 2ax + 2bx$$



Klammer mal Klammer:

Grundregel

Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert (als Summanden gelten auch solche mit negativem Vorzeichen). Achtung: Vorzeichenregeln beachten!

Beispiel

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Klammer mal Klammer mal Klammer:

Grundregel

Bei drei Klammern vereinigt man erst ein Paar, das man allerdings dabei in Klammern lässt, und multipliziert dann mit der dritten Klammer aus.

Beispiel

$$(x + 2y) \cdot (3a - b) \cdot (4 + c) = (3ax - bx + 6ay - 2by) \cdot (4 + c) \\ = 12ax + 3acx - 4bx - bcx + 24ay + 6acy - 8by - 2bcy$$

Klammer in der Klammer:

Grundregel

Wie oben bereits erwähnt, fängt man bei der innersten Klammer an. Ansonsten gelten alle Regeln wie hier beschrieben.

Beispiel

$$x + (5 - 2(a + 3b)) = x + (5 - 2a - 6b) = x + 5 - 2a - 6b = -2a - 6b + x + 5$$

Beispiel

$$x + (5 - 2(a + 3b)^2) = x + 5(-2(a^2 + 6ab + 9b^2)) \\ = x + 5 - 2a^2 - 12ab - 18b^2$$

Exponent hinter einer Klammer:

Grundregel

Ein Exponent an einer Klammer bedeutet dasselbe wie bei Zahlen: Die Klammer muss sooft mal sich selbst genommen werden, wie der Exponent anzeigt.

Beispiel

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$



Faktorisieren oder Ausklammern:

Beim Faktorisieren wird die Klammerrechnung „rückwärts“ angewendet, also wieder eine Klammer erzeugt.

Grundregel

Bei genauer Betrachtung des Terms, der aus mehreren Summanden besteht, stellt man fest, dass es einen oder mehrere Faktoren gibt, die in mehreren Summanden vorkommen. Diese Faktoren schreibt man VOR die Klammer, und in der Klammer verbleiben die „Reste“ der Summanden, die vorher durch den Faktor geteilt wurden.

Beispiel	$a \cdot c + b \cdot c = c \cdot (a + b)$
Beispiel	$a \cdot b \cdot c + a \cdot b \cdot d = a \cdot (bc + bd) = a \cdot (b \cdot (c + d)) = ab \cdot (c + d)$

Und hier einige Übungsaufgaben zu den genannten Grundregeln:

Aufgaben		
Plusklammer:	1) $3a + (a + 5b - 2c) =$	
Minusklammer:	2) $2a - (2 + 7a) + 3 =$	3) $x - (-2x - 3) =$
	4) $4a - (-a + 5a^2 - 7c^3) =$	
Zahl mal Klammer	5) $4 \cdot (z - 3) =$	6) $(3a + 4) \cdot x - 7y$
	7) $4 \cdot (a + 5b - 2c^2) =$	8) $-3a \cdot (2a + 7b - 3c) =$
	9) $2 \cdot (3x - x) \cdot 3 =$	10) $(x + 3y - z^2) \cdot 2yz =$
	11) $3z \cdot (2z + x) =$	12) $(7c + 3x) \cdot 9x + 2a =$
Klammer mal Klammer	13) $(2a - b) \cdot (3a + 5b) =$	14) $(7x - 3y) \cdot (2x + 8y) =$
	15) $(2x - 3y) \cdot (4a - 5b + c) =$	16) $(2a - 3b + c^2) \cdot (5x - 7y) =$
Kl. mal Kl. mal Klammer	17) $(x + 2) \cdot (3a - b) \cdot (2a - x) =$	18) $(x - 3) \cdot (5x + y) \cdot (2a - 3y) =$
Exponent an Klammer	19) $(2a + 3b)^2 =$	20) $(5x - 8y)^2 =$
Ausklammern	21) $9z + 6 =$	22) $7y^2 - 14y =$
	23) $21x + 35y - 14z =$	24) $18ax - 63xy + 54xz =$
	25) $2xy + 10xyz - 20xz =$	26) $0,25a^2 - 0,75a =$
	27) $2b - (a \cdot (16a + 2b)) =$	28) $6 \cdot (b + c)^2 =$
Kombinationen	29) $20 - 5(x + 3(2 + a)^2) =$	30) $(7x - 3) \cdot (7x + 3) - (7x + 2)^2 =$



Thema 4: Binomische Formeln

Definition

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ a und b sind beliebige reelle Zahlen

3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Wer das Kapitel zur Klammerrechnung beherrscht, der benötigt die binomischen Formeln eigentlich gar nicht. Denn diese lassen sich wie folgt herleiten, indem man die Klammern einfach nach den bekannten Rechenregeln auflöst:

Herleitung

1. binomische Formel: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. binomische Formel: $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. binomische Formel: $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Es stellt sich nun die Frage, warum man die binomischen Formeln dennoch kennen sollte, wenn man deren Ergebnis doch ganz einfach durch Auflösung der Klammern ermitteln kann?

Die Antwort ist einfach: Weil es schneller geht! Kennt man die binomischen Formeln, kann man das Ergebnis direkt aufschreiben und die in der Tabelle nicht fettgedruckten Zwischenschritte können entfallen.

Betrachten wir nun die 1. binomische Formel einmal genauer: Wenn man sich vor Augen hält, dass diese aus den zwei Termen a und b besteht, dann liefert sie uns auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens eine Rechenanweisung wie mit diesen beiden Termen zu verfahren ist:

$$\underbrace{(a}_{\text{1. Term}} + \underbrace{b)}_{\text{2. Term}})^2 = \underbrace{a^2}_{\text{Quadriere 1. Term}} + \underbrace{2ab}_{\text{Multipliziere 1. und 2. Term und verdoppele das Ergebnis}} + \underbrace{b^2}_{\text{Quadriere 2. Term}}$$

Schauen wir uns nun diese Rechenanweisungen anhand von drei Beispielen an. Die auf der folgenden Seite stehenden Beispiele zeigen auch, dass a und b beliebige reelle Zahlen (Beispiele 1 und 2) sowie sonstige Ausdrücke (Beispiel 3) sein können:



Aufgabenstellung: Wende auf die folgenden Beispiele die binomischen Formeln an!

Beispielaufgaben Rechenanweisung	$(\underbrace{x}_{1. \text{Term}} + \underbrace{3}_{2. \text{Term}})^2$	$(\underbrace{-3c}_{1. \text{Term}} + \underbrace{4d}_{2. \text{Term}})^2$	$(\underbrace{\text{Tim}}_{1. \text{Term}} + \underbrace{\text{Bea}}_{2. \text{Term}})^2$
1) Quadriere den 1. Term	$x \cdot x = x^2$	$-3c \cdot (-3c) = 9c^2$	$\text{Tim} \cdot \text{Tim} = \text{Tim}^2$
2) Nimm den 1. und den 2. Term miteinander mal und verdopple das Ergebnis	$2 \cdot x \cdot 3 = 6x$	$2 \cdot (-3c) \cdot 4d = -24cd$	$2 \cdot \text{Tim} \cdot \text{Bea} = 2\text{TimBea}$
3) Quadriere den 2. Term	$3 \cdot 3 = 9$	$4d \cdot 4d = 16d^2$	$\text{Bea} \cdot \text{Bea} = \text{Bea}^2$
4) Addiere die drei Terme aus 1) - 3) auf (=Ergebnis)	$= x^2 + 6x + 9$	$= 9c^2 - 24cd + 16d^2$	$= \text{Tim}^2 + 2\text{TimBea} + \text{Bea}^2$

Anmerkung: Für die 2. und 3. binomische Formel gelten die Rechenanweisungen entsprechend, wobei bei der 3. binomischen Formel die Rechenanweisung 2) – also das Bestimmen des Terms $2ab$ – wegfällt.

Man kann die binomischen Formeln auch „rückwärts“ lösen, also z.B. einen Ausdruck in der Form $a^2 + 2ab + b^2$ in $(a + b)^2$ umwandeln. Dazu betrachten wir folgende Beispiele und die entsprechenden Rechenanweisungen:

Aufgabenstellung: Wandle die folgenden Ausdrücke in ein Produkt um!

Beispielaufgaben Rechenanweisung	$\underbrace{x^2}_{1. \text{Term}} + \underbrace{4x}_{2. \text{Term}} + \underbrace{4}_{3. \text{Term}}$	$\underbrace{81v^2}_{1. \text{Term}} + \underbrace{54vw}_{2. \text{Term}} + \underbrace{9w^2}_{3. \text{Term}}$
1) Ziehe die Wurzel aus dem 1. Term	$\sqrt{x^2} = x$	$\sqrt{81v^2} = 9v$
2) Ziehe die Wurzel aus dem 3. Term	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9w^2} = 3w$
3) Addiere die Ergebnisse aus 1) und 2), setze sie in Klammern und quadriere	$(x + 2)^2$	$(9v + 3w)^2$
4) Probe: Der Klammersausdruck aus 3) ist die Lösung, wenn man ihn mit der binomischen Formel „vorwärts“ auflöst und dann exakt den Ausdruck aus der Aufgabe erhält.	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$ Man erhält exakt den Ausdruck aus der Aufgabe! => $(x + 2)^2$ ist die Lösung.	$(9v + 3w)^2 = 81v^2 + 54vw + 9w^2$ Man erhält exakt den Ausdruck aus der Aufgabe! => $(9v + 3w)^2$ ist die Lösung.

Anmerkung: Für die 2. und 3. binomische Formel gelten die Rechenanweisungen entsprechend, wobei bei der 3. binomischen Formel unter 3) zwei Klammersausdrücke in der Form $(a + b)(a - b)$ aufgestellt und die Rechenanweisung 4) nicht durchgeführt werden muss.



Der Sinn der binomischen Formeln liegt aber nicht nur darin, dass man mit ihnen schneller rechnen kann. Insbesondere wenn man die binomischen Formeln „rückwärts“ anwenden kann, können bestimmte Terme vereinfacht werden, deren Vereinfachung ansonsten nicht möglich gewesen wäre.

Beispielaufgabe: Kürzen Sie den folgenden Term so weit wie möglich:

$$\frac{a^2 + 4a + 4}{a + 2} = \frac{(a + 2)^2}{a + 2} = a + 2$$

1. binomische Formel „rückwärts“ a + 2 kürzen

Aufgaben

1. Wenden Sie die binomischen Formeln an!		
a) $(5b + 10)^2$	b) $(7f + 4g)(7f - 4g)$	c) $(-7a - 9b)^2$
d) $(-4 + u)(-4 - u)$	e) $(-13r + 20s)^2$	f) $(4a + 7b)^2 + (3a - 7b)^2$
2. Wandeln Sie in ein Produkt um, wenn möglich!		
a) $y^2 + 10y + 25$	b) $9z^2 + 16zt + 9t^2$	c) $25y^2 - 49z^2$
d) $9y^2 - 4$	e) $4u^2 - 16uv + 16v^2$	f) $64x^2y^2 - 1$
g) $-3a^2v - 12abv - 12b^2v$	h) $196w^2 - 79wx + 9x^2$	i) $9abc^2 - 4abd^2$
3. Ergänzen Sie die fehlenden Werte!		
a) $(x + \dots)(x - \dots) = x^2 - 25$	b) $(x + \dots)^2 = x^2 + 8x + \dots$	c) $(2x - \dots)^2 = 4x^2 - \dots + 9$
d) $(\dots - 2s)^2 = \dots - 16rs + 4s^2$	e) $(2c - \dots)^2 = 4c^2 - 12cd + \dots$	f) $(\dots - 6x)^2 = \dots + 36xy + 36x^2$



Thema 5: Bruchrechnen

Die Bruchrechnung benötigt man, wenn es nicht um „ganze“ Dinge geht. So isst man oftmals eben nicht einen „ganzen“ Kuchen, sondern nur einen Teil eines Kuchens.

Eine Bruchzahl entsteht bei der Division von natürlichen Zahlen.

Definition

$$\begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \text{Nenner} \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \frac{4}{5} \rightarrow 4 : 5$$

Für das Rechnen mit Brüchen gelten folgende Regeln:

Erweitern

Ein Bruch wird erweitert, indem Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert (mal genommen) werden.

Beispiel

Der Bruch soll mit 3 erweitert werden:

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}$$

Beispiel

Der Bruch soll mit 5 erweitert werden:

$$\frac{3a+5}{12a+4b} = \frac{(3a+5) \cdot 5}{(12a+4b) \cdot 5} = \frac{15a+25}{60a+20b}$$

Kürzen

Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert (geteilt) werden.

Beispiel

Der Bruch soll mit 3 gekürzt werden:

$$\frac{6}{21} = \frac{6:3}{21:3} = \frac{2}{7}$$

Beispiel

$\frac{ab+c}{a}$ → kürzen ist nicht möglich, da sich im Zähler eine Summe befindet.

Beispiel

$\frac{ab+ac}{a} = \frac{a(b+c)}{a} = b+c$ → aus der Summe im Zähler wird durch Ausklammern ein Produkt; jetzt ist kürzen möglich.

Der Wert des Bruches bleibt beim Erweitern und Kürzen unverändert!



Addition und Subtraktion

Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem die Brüche auf den gleichen Nenner gebracht werden und die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden. Der Nenner wird beibehalten.

Beispiel	Brüche gleichnamig machen, d.h. alle Nenner sind gleich: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}$ Hauptnenner dieser drei Brüche ist 28 $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 14}{2 \cdot 14} = \frac{14}{28}$ $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = \frac{21}{28}$ $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$
Beispiel	Addition: $\frac{14}{28} + \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{14+21+20}{28} = \frac{55}{28}$ Subtraktion: $\frac{21}{28} - \frac{20}{28} = \frac{21-20}{28} = \frac{1}{28}$

Multiplikation

Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
(Wenn die Möglichkeit besteht, sollte man zuvor kürzen!)

Beispiel	$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 7} = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$
-----------------	----------------------------------------------------------------------------------------------

Division

Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert multipliziert.

Kehrwert: Zähler und Nenner vertauschen

(Wenn die Möglichkeit besteht, sollte man zuvor kürzen!)

Beispiel	$\frac{3}{4} : \frac{6}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 2} = \frac{7}{8}$
-----------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



Aufgaben

1. Erweitern Sie die Brüche:		
a) $\frac{a}{2a}$ mit 4		
b) $\frac{5ab}{7a-3b}$ mit 9		
c) $\frac{7a+b}{3a-b}$ mit $3a+b$		
2. Erweitern Sie den Bruch auf die in Klammern angegebenen Nenner:		
a) $\frac{8a}{9b}$ ($81ab^2$)		
b) $\frac{3a^2b}{14ab^2}$ ($84a^2b^2$)		
c) $\frac{5x+3y}{3x-2y}$ ($9x^2-4y^2$)		
3. Addieren Sie / Subtrahieren Sie folgende Brüche:		
a) $\frac{5}{3} - \frac{3}{8}$		
b) $\frac{5x+3y}{xy} - \frac{2x+3y}{xy}$		
c) $\frac{12x+14}{12} - \frac{2x+8}{16}$		
4. Multiplizieren Sie folgende Brüche:		
a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8}$		
b) $\frac{5x}{3} \cdot \frac{x}{4}$		
c) $\frac{3x+6xy}{2x+y} \cdot \frac{2x+y}{3x}$		
5. Dividieren Sie folgende Brüche und kürzen Sie, so weit möglich:		
a) $\frac{1}{8} : \frac{3}{2}$	b) $\frac{5x}{3y} : \frac{3x^2}{y}$	c) $\frac{5x+3}{2y^2} : \frac{10x+6}{8y^2}$
6. Kürzen Sie die Brüche, indem Sie die binomischen Formeln verwenden:		
a) $\frac{25c^2-16d^2}{5c-4d}$	b) $\frac{18xy}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{12x}$	c) $\frac{4xy}{9x^2-25y^2} \cdot (9x+15y)$
d) $\frac{a^2+6a+9}{a+3}$	e) $\frac{4a+3b}{16a^2-9b^2}$	f) $\frac{3f-2g}{9f^2-12fg+4g^2}$



Thema: Dreisatz und Prozentrechnen

Dreisatzrechnung

Beispiel 1 Ein Bagger hebt in 8 Stunden 450 m^3 Boden aus. Wie viel Boden würde er bei gleicher Leistung in 20 Stunden ausheben?

Ein möglicher Lösungsweg, bei dem man kaum etwas verkehrt machen kann, sieht wie folgt aus :

Grundregel

1. Schritt		2. Schritt		3. Schritt	
Stunden	m^3	Stunden	m^3	Stunden	m^3
8	450	8	450	8	450
		1	56,25	1	56,25
				20	1125

Male zwei Spalten, wie oben abgebildet, schreibe die beiden Größen aus der Aufgabe (Stunden, m^3) darüber und trage die Werte aus der Aufgabe darunter ein. Achte darauf, dass die gesuchte Größe (m^3) möglichst auf der rechten Seiten steht.

Berechne, wie viel Boden der Bagger in einer Stunde ausheben kann. Dividiere dazu 450 durch 8, weil der Bagger in kürzerer Zeit auch weniger leistet.. (**gerades oder proportionales Verhältnis**).

Berechne dann, wie viel Boden der Bagger in 20 Stunden aushebt. Dazu muss das Ergebnis für eine Stunde mit 20 multipliziert werden.
Ergebnis: 1125 m^3

Beispiel 2 Um eine Garageneinfahrt zu pflastern, benötigen 3 Pflasterer 24 Stunden. Wie viel Zeit würden bei gleicher Leistung 4 Pflasterer benötigen?

Grundregel

1. Schritt		2. Schritt		3. Schritt	
Pflasterer	Stunden	Pflasterer	Stunden	Pflasterer	Stunden
3	24	3	24	3	24
		1	72	1	72
				4	18

Male zwei Spalten, wie oben abgebildet, schreibe die beiden Größen aus der Aufgabe (Pflasterer, Stunden) darüber und trage die Werte aus der Aufgabe darunter ein. Achte darauf, dass die gesuchte Größe (Stunden) wieder auf der rechten Seiten steht.

Berechne, wie viele Stunden ein Pflasterer benötigen würde. Multipliziere dazu 24 mit 3, weil ein Pflasterer mehr Zeit braucht (**ungerades oder anti-proportionales Verhältnis**).

Berechne dann, wie viele Stunden 4 Pflasterer benötigen. Dazu muss das Ergebnis für einen Pflasterer durch 4 dividiert werden.
Ergebnis: 18 Stunden



Beispiel 3

Zusammengesetzter Dreisatz

5 Arbeiter legen einen Weg an. Wenn sie 8 Stunden täglich arbeiten, schaffen sie eine Weglänge von 50 m. Welche Strecke schaffen 8 Arbeiter bei gleicher Arbeitsleistung, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten?

Bei dieser Aufgabe haben wir es mit drei Größen zu tun: Anzahl der Arbeiter, tägliche Arbeitszeit und die Länge des Weges. Man kann solche Aufgaben wie oben, aber mit zwei Tabellen lösen.

Grundregel

1. Schritt

Arbeiter	Meter
5	50
1	10
8	80

$50 : 5 = 10$
 $10 \times 8 = 80$

Berechne zunächst den Dreisatz für die Größen Arbeiter und Meter ohne Berücksichtigung der tägl. Arbeitszeit.

Zwischenergebnis: 8 Arbeiter schaffen 80 Meter bei gleicher tägl. Arbeitszeit.

2. Schritt

Stunden	Meter
8	80
1	10
10	100

$80 : 8 = 10$
 $10 \times 10 = 100$

Berechne dann den Dreisatz für die Arbeitszeit und die Meter.

Ergebnis: 100 Meter

Aufgaben

- Ein PKW verbraucht auf 100 km 9,6 Liter Benzin. Welche Strecke kann er mit einer Tankfüllung von 60 Litern zurücklegen?
- Im Baumarkt kosten 40 Linsenkopf-Stahlstifte 0,68 €. Wie viel würden 250 Stahlstifte gleichen Typs kosten?
- Jan kommt mit seinem Taschengeld 20 Tage aus, wenn er pro Tag 1,5 EURO verbraucht. Wie lange würde er auskommen, wenn er täglich 0,30 EURO einsparen kann?
- Familie Meier tauscht für einen USA-Urlaub 800 EURO für 794 \$ um.
a) Wie viel Dollar würden sie bei gleichem Kurs für 650 EURO bekommen?
b) Wie war der Kurs, d.h. was kostet 1 US-Dollar?
- In ein Regal passen 40 Ordner mit einer Breite von 50 mm. Es sollen neue Ordner mit einer Breite von 80 mm angeschafft werden. Wie viele Ordner würden in das Regal passen?
- Die monatliche Stromrechnung für 8 Lampen beträgt bei täglich 8-stündiger Brenndauer 18 EURO. Welcher Betrag ist zu zahlen, wenn 12 Lampen mit gleicher Leistung täglich 6 Stunden brennen?
- Ein 6 m² großes Kupferblech, 4 mm dick, wiegt 213,6 kg. Wie viel wiegt ein 3 mm dickes Kupferblech mit einer Fläche von 4 m²?
- Eine Straße steigt auf 2,4 km Länge um 8,4 m. Wie viel m würde sie bei gleichbleibender Steigung auf 5 km ansteigen?



Prozentrechnung

Der Prozentrechnung kommt in der kaufmännischen Praxis nahezu aller Berufe eine besondere Rolle zu. Anwendung findet sie zum Beispiel bei der Berechnung von Umsatzsteuer, Provisionen und Rabatten.

Merke

W= Prozentwert. Gibt den Anteil am Grundwert an.

G= Grundwert. Wird auf die Zahl 100 bezogen.

p %= Prozentsatz. Gibt den Anteil bezogen auf 100 an ($\frac{p}{100}$).

Definition

Grundformel der Prozentrechnung: $W = \frac{G \cdot p}{100}$

Die Grundformel muss jeweils nach der gesuchten Größe umgestellt werden.

Beispiel 1

Der Preis einer Jeans beträgt 65 €. Im Sommerschlussverkauf wird der Preis um 15% reduziert. Wie viel spart der Kunde/die Kundin beim Kauf?

Lösung 1

Gesucht: W = ?

Gegeben: G = 65 €
p = 15

Lösung: $W = \frac{G \cdot p}{100}$ $W = \frac{65€ \cdot 15}{100}$ W = 9,75 €

Beispiel 2

Mark erhielt dieses Jahr 2% Gehaltserhöhung. Sein Gehalt beträgt nach dieser Gehaltserhöhung 2550 €. Wie hoch war sein ursprüngliches Gehalt.

Erläuterung:

Die Gehaltserhöhung wurde vom ursprünglichen Gehalt berechnet. Dieses ursprüngliche Gehalt entspricht somit 100% (= Grundwert). Das neue Gehalt ist um 2% höher als das ursprüngliche Gehalt und entspricht demnach 100% + 2% = 102% (vermehrter Grundwert). Gesucht wird das ursprüngliche Gehalt, d.h. der Grundwert.

Lösung 2

Gesucht: W = 2550 **Lösung:** $W = \frac{G \cdot p}{100}$ $2550 = \frac{G \cdot 102}{100}$

Gegeben: G = ?
p = 102 $G = \frac{2550 \cdot 100}{102} = 2500$



Beispiel 3

Mark möchte künftig vier Stunden weniger pro Woche arbeiten. Sein Arbeitgeber teilt ihm mit, dass er nach dieser Arbeitszeitverkürzung 10 % weniger Gehalt bekommen würde, das wären 2250 €. Wie hoch war sein ursprüngliches Gehalt?

Erläuterung:

Die Gehaltskürzung wurde vom ursprünglichen Gehalt berechnet. Dieses ursprüngliche Gehalt entspricht somit 100% (= Grundwert). Das neue Gehalt ist um 10% niedriger als das ursprüngliche Gehalt und entspricht demnach $100\% - 10\% = 90\%$ (verminderter Grundwert). Gesucht wird das ursprüngliche Gehalt, d.h. der Grundwert.

Lösung 3

Gesucht: $W = 2250$	Lösung: $W = \frac{G \cdot p}{100}$	$2250 = \frac{G \cdot 90}{100}$
Gegeben: $G = ?$	$G = \frac{2250 \cdot 100}{90} = 2500$	
$p = 90$		

Aufgaben

1. Eine Anwaltsgehilfin zahlt monatlich 22% Lohnsteuer, das sind 435,60 €. Wie hoch ist ihr Bruttolohn?
2. Marks Monatsgehalt beträgt 2.500,00 €. Er bekommt dieses Jahr 2% Gehaltserhöhung. Wie hoch ist sein zukünftiges Gehalt?
3. In einer FOS-Klasse sind 17 Jungen und 8 Mädchen. Wie viel Prozent Jungen bzw. Mädchen sind in der Klasse?
4. Ein Gärtner kauft einen Rasentraktor und erhält einen Rabatt. Wie viel Prozent Rabatt bekommt er, wenn er statt 1.342,50 € nur 1.261,95 € zahlt?
5. Die Maklergebühren bei einem Hauskauf liegen bei 2% des Kaufpreises. Außerdem fallen weitere Mehrkosten von 16.000 € an. Mit wie viel Prozent Mehrkosten sind bei einem Kaufpreis von 200.000 € zu rechnen?
6. Bei einem jährlich stattfindenden dreitägigen Rockfestival konnten dieses Jahr insgesamt 16.240 zahlende Besucher gezählt werden, das waren 12 % mehr als im Vorjahr. Wie hoch war die Besucherzahl des Vorjahrs?
7. Ein Lederfachgeschäft führt einen Räumungsverkauf durch. Die Preise für alle Waren werden um 12,5 % gesenkt. Wie hoch ist der neue Preis, wenn der bisher ausgezeichnete Preis für eine Ledertasche 350 € betrug?
8. Der Umsatz eines Fachgeschäfts war im März 6 % höher als im Februar, im April aber um 5% niedriger als im März. Berechnen Sie den Umsatz im Februar und im März, wenn im April 18.400 € umgesetzt wurden.

**Thema 7:****Maße****Längenmaße****Merke**

Das Zehnfache einer Einheit ergibt jeweils die nächst größere Einheit

<u>Länge</u>		
Einheiten	Zeichen	Umrechnung
Kilometer	km	1 km = 1000 m
Meter	m	1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
Dezimeter	dm	1 dm = 10 cm = 100 mm
Zentimeter	cm	1 cm = 10 mm
Millimeter	mm	

Schreibe die folgenden Längenangaben in der nächst kleineren und nächst größeren Einheit.

Aufgaben

	Kleinere Einheit	Größere Einheit
340 cm		
7600 dm		
8600 m		



Flächenmaße

Merke

Das Hundertfache einer Einheit ergibt jeweils die nächst größere Einheit

<u>Flächeninhalt</u>		
Einheiten	Zeichen	Umrechnung
Quadratkilometer	km ²	1 km ² = 100 ha
Hektar	ha	1 ha = 100 a
Ar	a	1 a = 100 m ²
Quadratmeter	m ²	1 m ² = 100 dm ²
Quadratdezimeter	dm ²	1 dm ² = 100 cm ²
Quadratzentimeter	cm ²	1 cm ² = 100 mm ²
Quadratmillimeter	mm ²	

Schreibe die folgenden Flächenangaben in der nächst kleineren und nächst größeren Einheit.

Aufgaben

	Kleinere Einheit	Größere Einheit
340 cm ²		
7600 dm ²		
8600 ha		

Volumenmaße

Merke

Das Tausendfache einer Einheit ergibt jeweils die nächst größere Einheit

<u>Volumen</u>		
Einheiten	Zeichen	Umrechnung
Kubikmeter	m ³	1 m ³ = 1000 dm ³
Kubikdezimeter	dm ³	1 dm ³ = 1000 cm ³
Kubikzentimeter	cm ³	1 cm ³ = 1000 mm ³
Kubikmillimeter	mm ³	
Liter	l	1 l = 1 dm ³ = 1000 cm ³ = 1000 ml
Milliliter	ml	1 ml = 1 cm ³



Schreibe die folgenden Volumenangaben in der nächst kleineren und nächst größeren Einheit.

Aufgaben

	Kleinere Einheit	Größere Einheit
340 cm ³		
7600 dm ³		
8600 mm ³		

Massenmaße

Merke

Das Tausendfache einer Einheit ergibt jeweils die nächst größere Einheit

<u>Masse</u>		
Einheiten	Zeichen	Umrechnung
Tonne Kilogramm Gramm Milligramm	t kg g mg	1 t = 1000 kg 1 kg = 1000 g 1 g = 1000 mg

Schreibe die folgenden Massenangaben in der nächst kleineren und nächst größeren Einheit.

Aufgaben

	Kleinere Einheit	Größere Einheit
340 kg		
7600 g		
8600 mg		



Zeit

<u>Zeit</u>		
Einheiten	Zeichen	Umrechnung
Tag Stunde Minute Sekunde	d h min s	$1 \text{ d} = 24 \text{ h}$ $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$ $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$

Schreibe die folgenden Zeitangaben in die gewünschte Einheit.

Aufgaben			
2,5 d		h	min
4 min 20 s		h	s
340 s		min	H

Geld

<u>Geld</u>		
Einheiten	Zeichen	Umrechnung
EURO Cent	€ ct	$1 \text{ €} = 100 \text{ ct}$

Schreibe die folgenden Geldangaben in die gewünschte Einheit.

Aufgaben	
44 ct	€
3,20 €	ct
340 ct	€

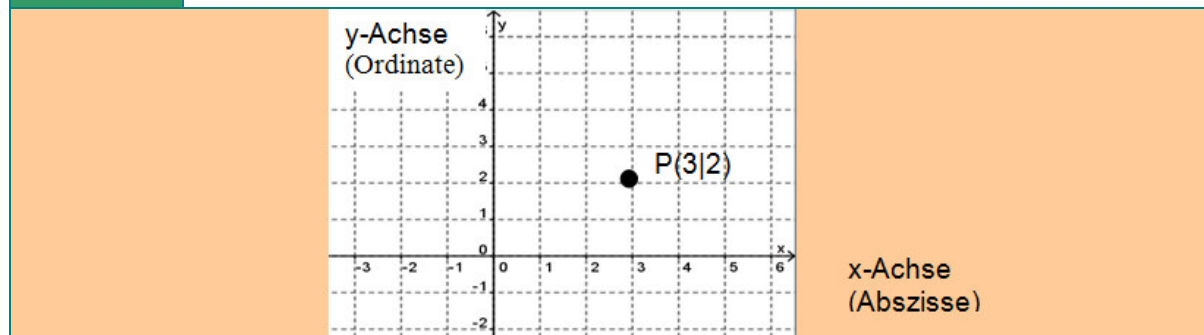


Thema 8: Koordinatensysteme

Koordinatensysteme sind Hilfsmittel der Mathematik zur Bezeichnung von Positionen im Raum. Sie werden in vielen Wissenschaften, in der Technik verwendet und sind auch oft im Alltag zu finden:

- Längen- und Breitengrade bilden ein geographisches Koordinatensystem der Erde
- In Spielen wie Schiffe versenken oder beim Schachbrett werden Felder mit Koordinaten wie B3 bezeichnet.
- Wanderkarten und Stadtpläne sind meist in Koordinaten-Quadrate eingeteilt. In unseren Koordinatensystemen wird jedem "x-Wert" ein "y-Wert" zugeordnet, dadurch entsteht ein Punkt $P(x|y)$. Die Achsen werden auch als Abszisse (x-) und Ordinate (y-Achse) bezeichnet. Als Eselsbrücke kann man sich merken, dass immer die jeweils im Alphabet vorne stehenden und hinten stehenden Bezeichnungen zusammengehören: x zu Abszisse und y zu Ordinate.

Definition



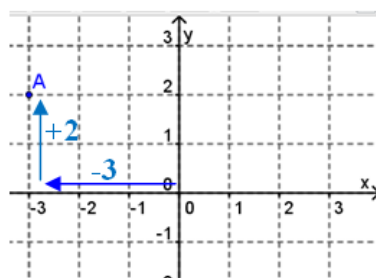
Für das Zeichnen im Koordinatensystem gilt:

Punkte einzeichnen

"Zuerst krabbelt das Baby, dann steht es auf!"

Beispiel

Der Punkt A $(-3|2)$ soll eingezeichnet werden:

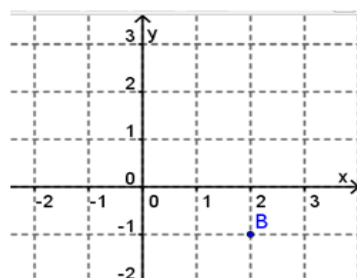


zuerst $-3 \Rightarrow$ nach links
(Baby krabbelt)

dann $+2 \Rightarrow$ nach oben
(Baby steht auf)

Beispiel

Der Punkt B $(2|-1)$ soll eingezeichnet werden:



zuerst $+2 \Rightarrow$ nach rechts
dann $-1 \Rightarrow$ nach unten

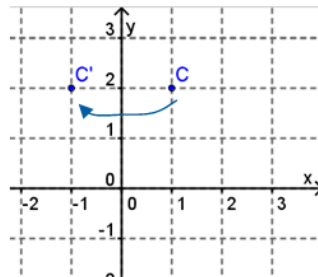


Spiegeln

Beim Spiegeln an der **y - Achse**, dreht sich das Vorzeichen des **x**-Wertes.
Beim Spiegeln an der **x - Achse**, dreht sich das Vorzeichen des **y**-Wertes.

Beispiel

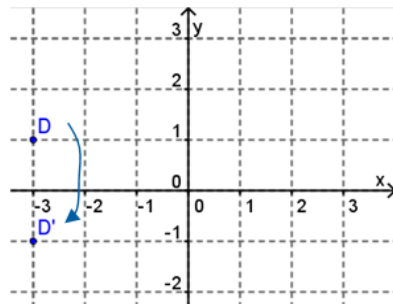
Der Punkt C(1|2) soll an der y-Achse gespiegelt werden:



nur der x-Wert verändert sich
=> das Vorzeichen dreht.
Neuer Punkt C' (-1|2)

Beispiel

Der Punkt D(-3|1) soll an der x-Achse gespiegelt werden:



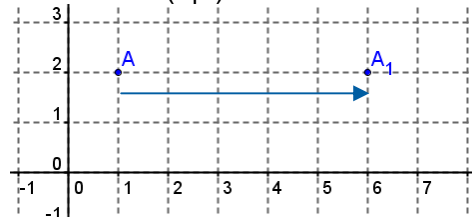
nur der y-Wert verändert sich
=> das Vorzeichen dreht.
Neuer Punkt D' (-3|-1)

Verschieben von Punkten

Beim Verschieben von Punkten wird die "Verschiebung" zum Punkt dazu addiert. und zwar die "Rechts-/ Links-Verschiebung" zum x Wert und die "Hoch- /Runter Verschiebung" zum y-Wert.

Beispiel

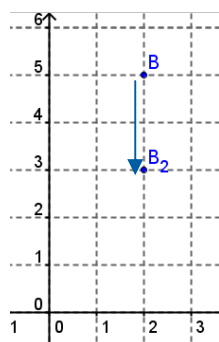
Der Punkt A(1|2) soll 5 nach rechts verschoben werden.



alter x Wert + Verschiebung:
 $1 + 5 = 6$
ergibt neuen x-Wert: 6
 $A_1(6|2)$

Beispiel

Der Punkt B(2|5) soll 2 nach unten verschoben werden.



alter y Wert + Verschiebung:
 $5 - 2 = 3$
ergibt neuen y-Wert: 3
 $B_1(2|3)$



Aufgaben

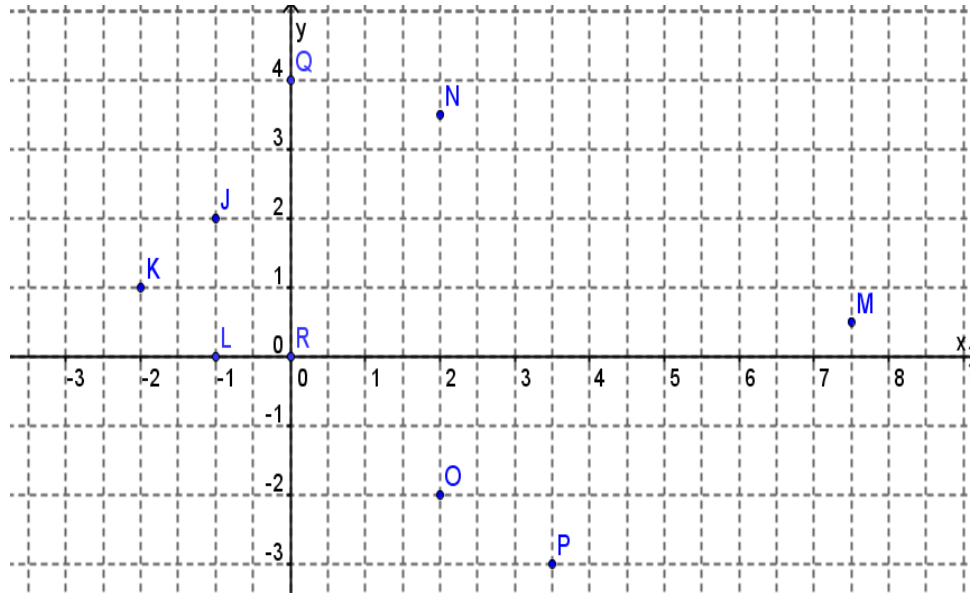
1. Zeichnen Sie die folgenden Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem:

a) A (2|7) B (-2|-5) C (-1|-1)

b) D (-6|4) E (2|-4) F (-5|-8)

c) G (-1|-2) H (3|- 0,5) I (-1,5| 2,5)

2. Lesen Sie die Koordinaten der eingezeichneten Punkte ab



3. Spiegeln Sie die Punkte aus Aufgabe 1 an der y-Achse.

4. Spiegeln Sie die Punkte aus Aufgabe 2 an der x-Achse.

5. Zeichnen Sie die folgenden Punkte in das Koordinatensystem. Verschieben Sie dann die Punkte wie angegeben.

a) A (0| 0) Verschiebung um 3 nach oben.

b) B (2|-3) Verschiebung um 2 nach rechts und um 2 nach unten.

c) C (5|-8) Verschiebung um 1 nach oben und um 2 nach links.

d) D (-4|-3) Verschiebung um 2 nach unten und um 4 nach links.



Thema 9: Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen sind Gleichungen, die eine unbekannte Größe (z. B. x) als Variable enthalten. Lineare Gleichungen haben genau **eine** Lösung.

Wenn eine Gleichung mehrere Unbekannte enthält (z.B. $2a - 3b = 6$), so gibt es keine eindeutigen Lösungen, da es für die Unbekannten beliebig viele Lösungspaare gibt. Um eine solche Gleichung eindeutig lösen zu können, benötigt man eine weitere Gleichung, die die beiden selben Unbekannten enthält. Man spricht in diesem Fall von einem linearen Gleichungssystem mit 2 Unbekannten.

Es gilt: Es werden immer genauso viele Gleichungen benötigt, wie es Unbekannte gibt. Diese Gleichungen bilden zusammen ein Gleichungssystem.

Beim Rechnen mit linearen Gleichungssystemen sollten die einzelnen Gleichungen nummeriert werden.

Definition

Lineare Gleichung mit einer Unbekannten (x): $3x = 7$

Lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten (x, y):
$$\begin{array}{l|l} 3x + 2y = 15 & \text{I} \\ -2x + 5y = 10 & \text{II} \end{array}$$

Lineares Gleichungssystem mit mehreren Unbekannten (a, b, c):
$$\begin{array}{l|l|l} 3a + 2b + 5c = 0 & \text{I} \\ -4a + 2b - 8c = 10 & \text{II} \\ 5a - 3b + c = 4 & \text{III} \end{array}$$

Zum Lösen einer **linearen Gleichung** muss man diese umformen:

Umformen einer linearen Gleichung

(Äquivalenzumformung)

Zum Lösen einer Gleichung wird diese umgeformt, bis die Unbekannte (Variable) auf einer Seite alleine steht. => **ZUZA** "**Z**usammenfassen, **U**mformen, **Z**usammenfassen, **A**usrechnen"

Zum Umformen wird immer die gegengesetzte Rechenoperation angewendet. Also:
+ 4 wird mit - 4 auf die andere Seite gebracht, -1 wird mit +1 auf die andere Seite gebracht,
*3 wird mit : 3 auf die andere Seite gebracht.

ACHTUNG: *(-3) wird mit : (-3) auf die andere Seite gebracht.

Beispiel	$\begin{array}{l} -2x + 17 = 28 \quad -17 \\ -2x = 11 \quad : (-2) \\ x = -5,5 \end{array}$	Lösung: $x = -5,5$
Beispiel	$\begin{array}{l} 22x + 3x - 19 - 11x + 15 = 25 - 17 + 13x \\ 14x - 4 = 8 + 13x \quad - 13x \\ x - 4 = 8 \quad + 4 \\ x = 12 \end{array}$	Lösung: $x = 12$

Bei Gleichungssystemen (2 und mehr Unbekannte) versucht man aus zwei Gleichungen, die jeweils **BEIDE** Variablen enthalten, **EINE** Gleichung zu machen, die nur noch **EINE** der beiden Variablen enthält. Man kann drei verschiedene Verfahren anwenden, die alle eine Variable eliminieren:



Additionsverfahren

"Addiere die Gleichungen so, dass eine Variable wegfällt"

Beispiel	$\begin{array}{l} 6x + 12y = 30 \quad \text{I} \\ 3x + 3y = 9 \quad \text{II} \end{array}$ <p>Verändern der Gleichung II, damit beim addieren, eine Variable wegfällt: II*4 $12x + 12y = 36$</p> $I + II \cdot 4$ $\begin{array}{r} \text{I} \quad 6x + 12y = 30 \\ \text{II} \quad -12x - 12y = -36 \\ \hline -6x \quad \quad = -6 \quad :(-6) \\ \quad \quad \quad \quad x = +1 \end{array}$ <p>Nun wird die Lösung in eine der beiden Gleichungen eingesetzt und wir erhalten y. $x = 1$ in II</p> $3 \cdot (1) + 3y = 9$ $\begin{array}{r} 3 + 3y = 9 \quad -3 \\ \quad + 3y = 6 \quad :3 \\ \quad \quad \quad y = 2 \end{array}$ <p>Lösung des Gleichungssystems: $x = 1 ; y = 2$</p>
Beispiel	$\begin{array}{l} 4x + 3y = 10 \quad \text{I} \\ -5y = 2x - 19 \quad \text{II} \end{array}$ <p>Zum Addieren müssen die jeweiligen Variablen übereinander stehen. Deswegen muss die Gleichung II erst umgeformt werden.</p> $I + II \cdot 2$ $\begin{array}{r} \text{I} \quad 4x + 3y = 10 \\ \text{II} \quad -4x - 10y = -38 \\ \hline -7y = -28 \quad :(-7) \\ \quad \quad \quad y = +4 \end{array}$ <p>Nun wird die Lösung in eine der beiden Gleichungen eingesetzt und wir erhalten y. $y = 4$ in II</p> $-5 \cdot 4 = 2x - 19$ $\begin{array}{r} -20 = 2x - 19 \quad +19 \\ -1 = 2x \quad \quad :2 \\ -0,5 = x \end{array}$ <p>Lösung des Gleichungssystems: $x = -0,5 \quad y = 4$</p>



Einsetzungsverfahren

"Setze eine Gleichung in die andere ein, damit eine Variable wegfällt."

☞ Das geht immer dann, wenn eine Gleichung schon nach einer Variablen aufgelöst ist

Beispiel	$\begin{cases} 2x + 3y = 14 & \text{I} \\ x = -2y + 8 & \text{II} \end{cases}$ <p>Anstelle von x in Gleichung I wird die gesamte Gleichung II (-2y+8) eingesetzt</p> <p><i>II in I</i></p> $2(-2y + 8) + 3y = 14 \quad \text{Klammer ausmultiplizieren}$ $-4y + 16 + 3y = 14 \quad \text{Zusammenfassen}$ $-y + 16 = 14 \quad -16 \quad \text{umformen}$ $-y = -2 \quad :(-1)$ $+y = +2$ <p><i>y in II</i></p> $x = -2 \cdot (2) + 8$ $x = -4 + 8$ $x = 4$ <p>Lösung: x=4 y=2</p>				
	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2">Beispiel</td> <td> $\begin{cases} \text{I} & y = x - 5 \\ \text{II} & -x + 2y = -2 \end{cases}$ </td> <td> $\begin{aligned} & \text{I in II} \\ & -x + 2(x - 5) = -2 \\ & -x + 2x - 10 = -2 \\ & x = +8 \end{aligned}$ </td> <td> $\begin{aligned} & x = 8 \text{ in I} \\ & y = 8 - 5 \\ & y = 3 \end{aligned}$ </td> <td> Lösung: x = 8 y = 3 </td> </tr> </table>	Beispiel	$\begin{cases} \text{I} & y = x - 5 \\ \text{II} & -x + 2y = -2 \end{cases}$	$\begin{aligned} & \text{I in II} \\ & -x + 2(x - 5) = -2 \\ & -x + 2x - 10 = -2 \\ & x = +8 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & x = 8 \text{ in I} \\ & y = 8 - 5 \\ & y = 3 \end{aligned}$
Beispiel	$\begin{cases} \text{I} & y = x - 5 \\ \text{II} & -x + 2y = -2 \end{cases}$		$\begin{aligned} & \text{I in II} \\ & -x + 2(x - 5) = -2 \\ & -x + 2x - 10 = -2 \\ & x = +8 \end{aligned}$	$\begin{aligned} & x = 8 \text{ in I} \\ & y = 8 - 5 \\ & y = 3 \end{aligned}$	Lösung: x = 8 y = 3

Gleichsetzungsverfahren

"Setze I = II, damit eine Variable wegfällt."

☞ Das geht immer dann, wenn beide Gleichung nach der GLEICHEN Variablen aufgelöst sind

Beispiel	$\begin{cases} \text{I} & x = 8y + 16 \\ \text{II} & x = 2y - 10 \end{cases}$ <p>Setze I = II und berechne y</p> <p>Die Lösung für y, wird wieder in eine Gleichung eingesetzt:</p> $8y + 16 = 2y - 10 \quad -2y$ $6y + 16 = -10 \quad -16$ $6y = -26 \quad :6$ $y = -4\frac{1}{3}$ $x = 2 \cdot (-4\frac{1}{3}) - 10$ $x = -2 \cdot \frac{13}{3} - 10$ $x = -\frac{26}{3} - 10$ $x = -\frac{56}{3} = -18\frac{2}{3}$ <p>Lösung: x = -18,6 y = -4,3</p>				
	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2">Beispiel</td> <td> $\begin{cases} \text{I} & y = 2x + 4 \\ \text{II} & 4x - 8 = y \end{cases}$ </td> <td> $\begin{aligned} & \text{I} = \text{II} \\ & 2x + 4 = 4x - 8 \quad -2x + 8 \\ & 12 = 2x \quad :2 \\ & 6 = x \end{aligned}$ </td> <td> $\begin{aligned} & x = 6 \text{ in I} \\ & y = 2 \cdot 6 + 4 \\ & y = 16 \end{aligned}$ </td> <td> Lösung: x = 6 y = 16 </td> </tr> </table>	Beispiel	$\begin{cases} \text{I} & y = 2x + 4 \\ \text{II} & 4x - 8 = y \end{cases}$	$\begin{aligned} & \text{I} = \text{II} \\ & 2x + 4 = 4x - 8 \quad -2x + 8 \\ & 12 = 2x \quad :2 \\ & 6 = x \end{aligned}$	$\begin{aligned} & x = 6 \text{ in I} \\ & y = 2 \cdot 6 + 4 \\ & y = 16 \end{aligned}$
Beispiel	$\begin{cases} \text{I} & y = 2x + 4 \\ \text{II} & 4x - 8 = y \end{cases}$		$\begin{aligned} & \text{I} = \text{II} \\ & 2x + 4 = 4x - 8 \quad -2x + 8 \\ & 12 = 2x \quad :2 \\ & 6 = x \end{aligned}$	$\begin{aligned} & x = 6 \text{ in I} \\ & y = 2 \cdot 6 + 4 \\ & y = 16 \end{aligned}$	Lösung: x = 6 y = 16



Aufgaben

1. Lösen Sie die linearen Gleichungen

a) $10x - 3 = 12 + 5x$ b) $3(x - 3) = 5(2 + x) - 14$ c) $\frac{1}{3}x - 5\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right) = 5x$

2. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme.

a)
$$\begin{cases} 10x - 9y = 12 \\ 25x - 12y = 51 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 7 \\ 2x + 3y = 43 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} 10(3x + 5) = 2(16 - 3y) \\ 6(1 - 7x) = 5(4y - 10) \end{cases}$$

3. Welches Verfahren sollte hier angewandt werden, um das Gleichungssystem möglichst elegant zu lösen?

a)
$$\begin{cases} 12x - 3y = 15 \\ 21x - y = 21 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} x = 15 + 3y \\ 9x - 10y = 2 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} 15 = 3x - 7y \\ 8x - 12y = 12 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x = 10 + 9y \\ \frac{1}{3}x = -10y \end{cases}$$
 e)
$$\begin{cases} y = -3 + 7x \\ 9x - 10y = 2 \end{cases}$$
 f)
$$\begin{cases} +3y - 8 = 4x \\ 4x = -2y + 7 \end{cases}$$

4. Lösen Sie die Gleichungssysteme möglichst elegant.

a)
$$\begin{cases} x = 11 + 2y \\ 9x - 12y = 5 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} 2x - 28y = 15 \\ 9x - 12y = 5 \end{cases}$$
 c)
$$\begin{cases} 6x - 2y = 105 \\ 18 = 3x + 2y \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y + x = 22 - x \\ 9x - 2y = 11 \end{cases}$$
 e)
$$\begin{cases} \frac{1}{6}x - \frac{2}{6} = \frac{5}{3}y \\ \frac{2}{9}x - 5 = \frac{5}{3}y \end{cases}$$
 f)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 9 \\ \frac{x}{9} - \frac{y}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$



Thema 10: Strategien zum Lösen von Gleichungen

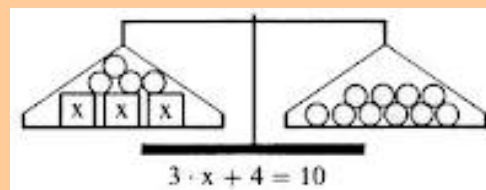
Das Lösen von Gleichungen gehört zu den wichtigsten Grundlagen, die im Mathematikunterricht der Mittelstufe gelernt werden müssen. Gleichungen müssen in fast jeder Stunde des Mathematikunterrichts gelöst werden. Grund genug, dieses Thema noch einmal gründlich unter die Lupe zu nehmen.

Formulieren wir dazu drei Fragen:

1. Was ist eine Gleichung?
2. Was kann man mit einer Gleichung machen?
3. Wie löst man eine Gleichung?

Was ist eine Gleichung ?

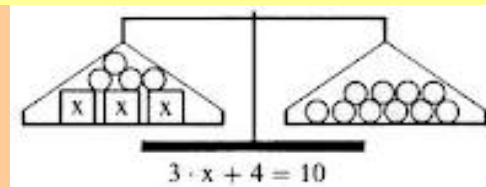
Eine Gleichung stellt eine Beziehung zwischen zwei Termen dar, die gleichwertig sind und miteinander durch das **Gleichheitszeichen** (=) verbunden sind. Man kann sich dies am Beispiel einer **Waage** veranschaulichen.



Die Waage befindet sich im Gleichgewicht, weil beide Waagschalen gleich schwer sind. Da auf der rechten Seite 10 Kugeln liegen, auf der linken Seite 4 Kugeln und 3 mit 'x' bezeichnete Kästen, muss einer dieser Kästen doppelt so schwer sein, wie eine Kugel. Das heißt: $x = 2$.

Was kann man mit einer Gleichung machen?

Im Umgang mit Gleichungen kommt es immer darauf an, dass die Gleichung im Gleichgewicht bleibt. Man kann auf den Waagschalen der Waage beliebig viele Kugeln hinzufügen oder wegnehmen, solange man dies auf beiden Waagschalen tut.



In der Mathematik bezeichnet man die Umformung einer Gleichung als **Äquivalenzumformung** (äquivalent heißt gleichwertig). Eine Äquivalenzumformung kann mit jeder beliebigen Rechenart durchgeführt werden. Wichtig ist nur, dass immer auf beiden Seiten dasselbe geschieht.



Wie löst man eine Gleichung?

Bei den meisten Gleichungen geht es darum, die **Gleichung nach einer Variablen aufzulösen**. Auflösen bedeutet, die Gleichung derart umzuformen, dass eine Variable allein auf einer Seite der Gleichung steht (im Prinzip ist es egal, ob die Variable links oder rechts vom Gleichheitszeichen steht).

Jede Äquivalenzumformung wird dadurch dargestellt, dass man rechts neben die Gleichung einen senkrechten Strich einfügt und dahinter schreibt, welche Umformung vorgenommen werden soll. Es ist auch möglich, zwei oder mehrere Äquivalenzumformungen gleichzeitig vorzunehmen (Siehe Beispiel).

Beispiel

Die Gleichung soll nach der Variablen x aufgelöst werden.

$$5 + 2r + 5x = 6r + 15 \quad | -5 \text{ und } | -2r$$

$$5x = 4r + 10 \quad | : 5$$

$$x = 0,8r + 2$$

Gefangene befreien

Die Hauptschwierigkeit beim Lösen von Gleichungen besteht darin, dass die Variable, die es aufzulösen gilt, noch nicht alleine steht. Meist ist die Variable in einem anderen Term **‚gefangen‘**. Die Äquivalenzumformung besteht nun darin, die Variable durch eine geeignete Rechenoperation zu **‚befreien‘**.

Beispiel

Die Variable x ist in der Klammer gefangen.

$$2(x + 3) = 12$$

Um x zu befreien, müssen wir zuerst die Klammer ausrechnen.

$$2x + 6 = 12$$

Die Variable x ist immer noch durch die 6 und den Faktor 2 gefangen.

Wir befreien sie durch geeignete Äquivalenzumformungen.

$$2x + 6 = 12 \quad | - 6$$

$$2x = 6 \quad | : 2$$

$$x = 3$$

Um eine Variable zu befreien wird die geeignete **Umkehroperation** verwendet. Die Tabelle stellt dar, durch welche Operationen Variable befreit werden können:

‚x‘ gefangen in ...	‚Befreiung ‚ durch ...	Operation	Umkehroperation
Klammer	Klammer auflösen	-	-
Im Zähler eines Bruchs	Multiplikation mit Nenner	x	:
Im Nenner eines Bruchs	Multiplikation mit Nenner	x	:
Quadratwurzel	Quadrieren	$\sqrt{\quad}$	$(\dots)^2$
Beliebige Wurzel	Potenzieren	$\sqrt[n]{\dots}$	$(\dots)^n$
Potenz	Wurzel ziehen	$(\dots)^n$	$\sqrt[n]{\dots}$
Als Exponent einer Potenz	Logarithmieren	2^x	$\log_2(x)$
Trigonometrische Funktion	Arkus-Funktion	$\sin(x)$	$\arcsin(x)$
Arkusfunktion	Trigonometrische Funktion	$\arccos(x)$	$\cos(x)$



	Gleichung	„Befreiungsaktion“
Beispiel 1	$2x^3 = 128 \quad : 2$	Division durch 2
	$x^3 = 64 \quad \sqrt[3]{\quad}$	3. te Wurzel ziehen
	$x = 4$	
Beispiel 2	$\frac{6}{\sqrt{x+1}} = 2 \quad \cdot \text{Nenner}$	Mit dem Nenner multiplizieren
	$6 = 2\sqrt{x+1} \quad : 2$	Division
	$3 = \sqrt{x+1} \quad (\quad)^2$	Quadrieren
	$9 = x+1 \quad -1$	
	$8 = x$	

Aufgaben

Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach der angegebenen Variablen auf!

1. $2\sqrt{3x+4} - 3 = 11$	nach x
2. $O = 4\pi r^2$ (Oberfläche einer Kugel)	nach r
3. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Hypothense im rechtwinkligen Dreieck)	nach a
4. $\frac{5x+1,5}{2} = 2x$	nach x
5. $\frac{2x-9}{x+3} = \frac{1}{3}$	nach x
6. $V = r - \sqrt{x+3}$ (hier muss eine binomische Formel angewendet werden!)	nach x
7. $p = \frac{K \cdot 100}{x+n}$	nach x
8. $2 = \frac{x^3 - 0,025}{0,05}$	nach x
9. $3(x^4 - 0,0625) = 15$	nach x

Auf der folgenden Seite werden Musterlösungen zu den Aufgaben 1, 5 und 8 vorgestellt.



Musterlösungen

Aufgabe 1	$2\sqrt{3x+4} - 3 = 11 \quad +3$ $2\sqrt{3x+4} = 14 \quad :2$ $\sqrt{3x+4} = 7 \quad ()^2$ $3x + 4 = 49 \quad -4$ $3x = 45 \quad :3$ $x = 15$
Aufgabe 5	$\frac{2x-9}{x+3} = \frac{1}{3} \quad \cdot (x+3)$ $2x-9 = \frac{1}{3}(x+3) \quad +9$ $2x-9 = \frac{1}{3}x + 1 \quad -\frac{5}{3}x$ $2x = \frac{1}{3}x + 10 \quad \cdot \frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}x = 10$ $x = 6$
Aufgabe 8	$2 = \frac{x^3 - 0,025}{0,05} \quad \cdot 0,05$ $0,01 = x^3 - 0,025 \quad + 0,025$ $0,125 = x^3 \quad \sqrt[3]{\quad}$ $0,5 = x$